FUNÇÃO MODULAR

- **Módulo (ou valor absoluto) de um número**

O módulo (ou valor absoluto) de um número real x, que se indica por | x | é definido da seguinte maneira:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

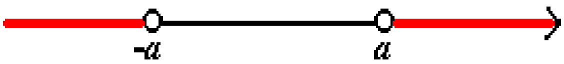
Então:
→ se x é positivo ou zero, | x | é igual ao próprio x.
Exemplos: | 2 | = 2 ; | 1/2 | = | 1/2 | ; | 15 | = 15

→ se x é negativo, | x | é igual a -x.
Exemplos: | -2 | = -(-2) = 2 ; | -20 | = -(-20) = 20

O módulo de um número real é **sempre** positivo ou nulo. O módulo de um número real **nunca** é negativo.
Representando geometricamente, o módulo de um número real x é igual a distância do ponto que representa, na reta real, o número x ao ponto 0 de origem. Assim:

- Se | x | < *a* (com *a*>0) significa que a distância entre x e a origem é menor que *a*, isto é, x deve estar entre –*a* e *a*, ou seja, | x | < *a* ⇔ -*a* < x < *a*.

- Se | x | > *a* (com *a*>0) significa que a distância entre x e a origem é maior que *a*, isto é, deve estar à direita de *a* ou à esquerda de –*a* na reta real, ou seja: | x | > *a* ⇔ x > *a* ou x < -*a*.



- **Equações modulares**

Toda a equação que contiver a incógnita em um módulo num dos membros será chamada **equação modular**.

Exemplos:

a) $|x^2-5x| = 1$
b) $|x+8| = |x^2-3|$

<u>Algumas equações modulares resolvidas:</u>

1) Resolver a equação $\mathbf{|x^2-5x| = 6}$.
Resolução: Temos que analisar dois casos:
caso 1: $x^2-5x = 6$

caso 2: $x^2-5x = -6$

Resolvendo o caso 1:
$x^2-5x-6 = 0$ => **$x'=6$** e **$x''=-1$**.
Resolvendo o caso 2:
$x^2-5x+6 = 0$ => **$x'=3$** e **$x''=2$**.
Resposta: S={-1,2,3,6}

2) Resolver a equação **| x-6 | = | 3-2x |**.
Resolução: Temos que analisar dois casos:
caso 1: x-6 = 3-2x
caso 2: x-6 = -(3-2x)
Resolvendo o caso 1:
x-6 = 3-2x => x+2x = 3+6 => 3x=9 => x=3
Resolvendo o caso 2:
x-6 = -(3-2x) => x-2x = -3+6 => -x=3 => x=-3
Resposta: S={-3,3}

- **Inequações modulares**

Chamamos de inequações modulares as inequações nos quais aparecem módulos de expressões que contém a incógnita.

Algumas inequações modulares resolvidas:

1) Resolver a inequação **| -2x+6 | < 2**.
Resolução:

$$|-2x+6|<2 \Rightarrow -2<-2x+6<2 \Rightarrow \begin{cases} -2<-2x+6 \\ -2x+6<2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x<6+2 \\ -2x<4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x<8 \\ 2x>4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<4 \\ x>2 \end{cases}$$

$S = \{x \in IR \mid 2<x<4\}$

2) Dê o conjunto solução da inequação $|x^2-2x+3| \leq 4$.

Resolução:
$|x^2-2x+3| \leq 4$ => $-4 \leq x^2-2x+3 \leq 4$.
Então temos duais inequações (que devem ser satisfeitas ao mesmo tempo):
Eq.1: $-4 \leq x^2-2x+3$
Eq.2: $x^2-2x+3 \leq 4$

Resolvendo a Eq.1:
$-4 \leq x^2-2x+3$ => $-4-3 \leq x^2-2x$ => $-7 \leq x^2-2x$ => $x^2-2x+7 \geq 0$ => **sem raízes reais**

Resolvendo a Eq.2:

$x^2-2x+3 \leq 4 \Rightarrow x^2-2x-1 \leq 0$

$$\text{Aplicando Bhaskara encontramos as raízes } \begin{cases} x' = 1-\sqrt{2} \\ x'' = 1+\sqrt{2} \end{cases}$$

$$S = \{x \in IR \mid 1-\sqrt{2} \leq x \leq 1+\sqrt{2}\}$$

- ## Módulo e raiz quadrada

Consideremos os números reais **x** e **y**.
Temos por definição, que

$$\sqrt{x} = y$$

se e somente se, $y^2 = x$ e $y \geq 0$. Daí podemos concluir que

$$\sqrt{x^2} = x$$

só é verdadeiro se $x \geq 0$.
Se tivermos $x<0$, não podemos afirmar que

$$\sqrt{x^2} = x$$

pois isso contradiz a definição.

Por exemplo, se $x=-3$, teríamos:

$$\sqrt{(-3)^2} = -3$$

o que é um absurdo, pois o primeiro membro é **positivo** e o segundo **negativo**. Usando a definição de módulo, podemos escrever:

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

o que é **verdadeiro** para todo **x** real.

Devemos proceder da mesma forma em relação a todas raízes de índice par:

$$\sqrt[4]{x^4} = |x|, \quad \sqrt[6]{x^6} = |x|, \quad \sqrt[2n]{x^{2n}} = |x|, \quad \text{com } \mathrm{x} \in \mathrm{IR} \text{ e } \mathrm{n} \in \mathrm{IN}^*$$

Com relação às raízes de índice ímpar, podemos escrever:

$$\sqrt[3]{x^3} = x, \quad \sqrt[5]{x^5} = x, \quad \sqrt[2n+1]{x^{2n+1}} = x, \quad \text{com } \mathrm{x} \in \mathrm{IR} \text{ e } \mathrm{n} \in \mathrm{IN}$$

- ## Função modular

Chamamos de função modular a função $f(x)=|x|$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Observe, então, que a função modular é uma função definida por duas sentenças.

→ **Determinação do domínio**

Vamos determinar o domínio de algumas funções utilizando inequações modulares:

Exemplo 1: Determinar o domínio da função

$$f(x) = \frac{1}{|x|-3}$$

Resolução:

$$\text{Sabemos que } \frac{1}{|x|-3} \text{ só é possível em IR se } |x|-3 \neq 0.$$

$$\text{Então: } |x|-3 \neq 0 \Rightarrow |x| \neq 3 \Rightarrow x \neq 3 \text{ ou } x \neq -3$$

$$\text{Resposta: } D = \{x \in IR \mid x \neq 3 \text{ ou } x \neq -3\}$$

Exemplo 2: Determinar o domínio da função

$$f(x) = \sqrt{2-|x-1|}$$

Resolução:

$$\text{Sabemos que } \sqrt{2-|x-1|} \text{ só é possível em IR se } 2-|x-1| \geq 0.$$

$$\text{Então: } 2-|x-1| \geq 0 \Rightarrow -|x-1| \geq -2 \Rightarrow |x-1| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x-1 \leq 2$$

$$-2 \leq x-1 \leq 2 \Rightarrow -2+1 \leq x \leq 2+1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 3$$

$$\text{Resposta: } D = \{x \in IR \mid -1 \leq x \leq 3\}$$

→ Gráfico

Vamos construir o gráfico da função f(x)=|x|:

x	y=f(x)
-1	1
-2	2
0	0
1	1
2	2

Gráfico da função f(x)=|x|: